



· 形式概念分析中的概念约简 ·

【主持人语】形式概念分析是以形式背景为数据基础,通过构造形式概念和概念格结构,对数据进行知识获取和直观呈现的重要理论。概念约简是2018年受因子分析理论启发提出的在形式概念分析框架下进行知识简化的新课题,可在不损失形式背景中所有原始信息的前提下,挖掘能反映特定知识的部分形式概念,从而实现以局部替代全局、集中体现形式背景内在知识的目标。概念约简的实施可降低使用形式概念分析解决问题的复杂性,也为概念格的压缩与简化提供了一个新的研究思路与方法。

根据约简研究的思想方法及概念约简的研究初衷可知,通过改变概念约简所蕴含的知识,可获得更多的概念约简语义,从而衍生出不同的理论问题,对应不同的应用环境。而对这些问题进行系统、深入地研究,探索相关理论方法,是解决基于形式背景的概念约简结构与性质、判定与构造、动态变化等问题的路径之一。

本栏目主要集中于几种不同背景的概念约简研究。内容包括:《对称形式背景及其概念约简》《保持规则前件信息的形式概念约简》《面向属性概念格的概念约简及其在知识空间理论中的应用》《基于不完备背景的3类SE-ISI概念约简》。

本栏目是概念约简研究起步阶段的尝试性工作,仅为概念约简研究的冰山一角。更为深刻的问题亟待感兴趣的同仁一起提出并解决,从而促进概念约简理论的发展,进一步丰富形式概念分析领域的研究内容。

【主持人】魏玲,西北大学数学学院教授,博士生导师。

对称形式背景及其概念约简

魏玲¹,赵思雨^{1,2},祁建军^{3,4}

(1. 西北大学 数学学院,陕西 西安 710127; 2. 咸阳师范学院 数学与统计学院,陕西 咸阳 712000;

3. 新疆政法学院 信息网络安全学院,新疆 图木舒克 844000;

4. 西安电子科技大学 计算机科学与技术学院,陕西 西安 710071)

摘要 形式背景是形式概念分析的数据基础与研究起点。为刻画形式背景中满足自反性和对称性的二元关系,首先定义对称形式背景,并研究对称形式背景的概念格以及对象概念、属性概念、并不可约概念与交不可约概念的特征;其次,定义对称概念,并证明对称概念集是对称形式背景的一个概念约简;最后,从冲突分析与社交网络两个角度给出对称形式背景、对称概念以及对称概念集的实际语义与应用。

关键词 形式概念分析;对称形式背景;概念约简;冲突分析;社交网络

中图分类号:O29,TP18 **DOI**:10.16152/j.cnki.xdxbr.2023-05-011

收稿日期:2023-06-20

基金项目:国家自然科学基金(12171392,61976244);陕西省自然科学基金基础研究计划(2021JM-141);西北大学研究生创新项目(CX2023065)

第一作者:魏玲,女,教授,博士生导师,从事形式概念分析、粒计算、三支决策理论等研究,wl@nwu.edu.cn。

通信作者:赵思雨,女,博士研究生,讲师,从事形式概念分析等研究,zzssyu@163.com。

Symmetric formal context and its concept reduct

WEI Ling¹, ZHAO Siyu^{1,2}, QI Jianjun^{3,4}

(1. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China;

3. School of Information Network Security, Xinjiang University of Political Science and Law, Tumushuke 844000, China;

4. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract A formal context is the data base and starting point for research in formal concept analysis. In order to describe the binary relations satisfying reflexivity and symmetry in a formal context, this paper firstly defines the symmetric formal context, and studies the characteristics of the concept lattice, the object concept, the attribute concept, the join irreducible concept and the meet irreducible concept of the symmetric formal context. Then, we propose the symmetric concept and prove that the symmetric concept set is a concept reduct of symmetric formal context. Finally, from the perspective of conflict analysis and social network, we show the practical semantics and application of the symmetric formal context, the symmetric concept and the symmetric concept set, respectively.

Keywords formal concept analysis; symmetric formal context; concept reduct; conflict analysis; social network

形式概念分析(formal concept analysis, FCA)是以形式背景为数据基础的知识发现理论,于1982年由德国数学家 Wille 提出^[1]。

FCA 的研究主题包括概念格构造^[2-3],概念格简化^[4]、约简^[5-17]、规则获取^[18-19]、应用^[19]等。其中,约简理论主要包括属性约简^[5-10]及概念约简^[11-17]。属性约简的目标是以极小的属性子集保持某一特性不变,如张文修^[5]、魏玲^[6]等研究保持概念格结构不变的属性约简,此外还有保持粒^[7]、交、并不可约元^[8-9],决策规则不变^[10]的属性约简。概念约简作为一个新的约简理论,其研究目标主要集中于以极小的概念子集保持形式背景的关系不变。魏玲^[11]、曹丽^[12]等提出了保持二元关系不变的概念约简(简称概念约简),给出了概念约简的计算方法,并将概念分类,研究了每类概念的概念特征。随后,谢小贤等通过布尔矩阵运算研究了概念特征和概念约简^[13];王霞等定义了概念可辨识矩阵,并基于此矩阵给出概念约简求解方法^[14];马文胜等提出了同效关系,并给出由同效关系子集补集的概念格来得到概念约简的新算法^[15];Zhao 等定义了代表概念矩阵,并给出了一种直观的寻找概念约简的方法^[16];李俊余等提出了三元背景中保留所有三元关系的三元概念约简^[17]。

形式背景是 FCA 的研究起点,关于形式背景变化的研究是 FCA 的研究热点。决策形式背景在形式背景的基础上加入了决策属性,魏玲等针

对决策形式背景定义了背景的协调性并讨论了属性约简^[6],随后研究了决策形式背景的规则提取^[18]。由于不确定数据的广泛存在性和不可避免性,许多学者也探索了不完备背景^[20],模糊背景^[21],区间值背景^[22]等不确定性背景的理论研究及实际应用。此外,FCA 与冲突分析、社交网络等领域结合,可用于解决各自领域的基本问题,而连接不同领域的基石与桥梁恰为形式背景。王艺超等在冲突分析中利用代理人之间的复合冲突程度定义了联盟形式背景,并利用联盟形式背景获取了极大联盟^[23];Hao 等将社交网络转化为基于修正邻接矩阵的形式背景,并利用该形式背景上的 k -等势概念探测了社交网络中的 k -团^[24]。

通过观察发现,联盟形式背景及基于修正邻接矩阵的形式背景可一般化为一类特殊的形式背景,本文称其为对称形式背景。事实上,在任何团体中,若团体内部关系具有自反性和对称性的特点,则该关系可以表示于对称形式背景中。因此,对称形式背景在 FCA 中占据着重要的地位,有必要对对称形式背景及其性质展开研究。另外,作为特殊的形式背景,对称形式背景的概念约简也具有特殊性,因此,本文亦探讨了对称形式背景的概念约简。

本文首先定义了对称形式背景并讨论了其性质;其次,研究了对称形式背景上由对称概念构成的概念约简;最后,给出了对称形式背景及其概念格在冲突分析、社交网络等领域的实际应用。

1 FCA 基础知识

定义 1^[1] 称三元组 (G, M, I) 为形式背景。其中: $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为对象集, $x_i (i \leq n)$ 称为对象; $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 为属性集, $a_j (j \leq m)$ 称为属性; $I \subseteq G \times M$ 为 G 与 M 之间的二元关系。对于任意的 $x \in G$ 及 $a \in M$, 若 $(x, a) \in I$, 称对象 x 具有属性 a 或属性 a 被对象 x 具有, 记为 xIa ; 若 $(x, a) \notin I$, 称对象 x 不具有属性 a 或属性 a 不被对象 x 具有, 记为 $xI^c a$ 。

对于任意的对象子集 $X \subseteq G$, 属性子集 $A \subseteq M$, 引入记号

$$XIA \Leftrightarrow \forall x \in X, a \in A, \text{ s. t. } xIa;$$

$$XI^c A \Leftrightarrow \exists x \in X, a \in A, \text{ s. t. } xI^c a.$$

设 (G, M, I) 为形式背景, 在对象子集 $X \subseteq G$ 和属性子集 $A \subseteq M$ 上定义一对对偶算子

$$X^* = \{a \in M \mid \forall x \in X, xIa\},$$

$$A^* = \{x \in G \mid \forall a \in A, xIa\}.$$

对偶算子的相关性质见文献[1]。特别地, 对于任意的对象 $x \in G$, 属性 $a \in M$, 记 $\{x\}^*$ 为 x^* , $\{a\}^*$ 为 a^* 。

定义 2^[1] 设 (G, M, I) 为形式背景, $X \subseteq G$, $A \subseteq M$ 。如果一个二元对 (X, A) 满足 $X^* = A$ 且 $A^* = X$, 则称 (X, A) 是一个形式概念, 简称概念。其中: X 为概念的外延; A 为概念的内涵。

在形式背景中, 对任意的对象 $x \in G$, 属性 $a \in M$, (x^{**}, x^*) 和 (a^*, a^{**}) 也是概念, 分别被称为对象概念及属性概念。

用 $L(G, M, I)$ 表示形式背景 (G, M, I) 的全体概念, 对于任意的 $(X_1, A_1), (X_2, A_2) \in L(G, M, I)$, 定义偏序关系

$$(X_1, A_1) \leq (X_2, A_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (\Leftrightarrow A_2 \subseteq A_1)$$

则 $L(G, M, I)$ 形成一个完备格, 称为概念格。其中上、下确界为

$$(X_1, A_1) \vee (X_2, A_2) = ((X_1 \cup X_2)^*, A_1 \cap A_2),$$

$$(X_1, A_1) \wedge (X_2, A_2) = (X_1 \cap X_2, (A_1 \cup A_2)^*).$$

设 L 为格, $x \in L$, 若 $x \neq \bigvee \{l \in L \mid l < x\}$, 则称 x 为并不可约元; 若 $x \neq \bigwedge \{l \in L \mid x < l\}$, 则称 x 为交不可约元^[1]。其中, $l < x$ 表示 $l \leq x$ 但 $l \neq x$, $x < l$ 同理。称概念格中的交不可约元为交不可约概念, 并不可约元为并不可约概念。

本文记概念格 $L(G, M, I)$ 中对象概念的全体为 $O(L)$, 属性概念的全体为 $A(L)$, 并不可约概念

的全体为 $J(L)$, 交不可约概念的全体为 $M(L)$ 。

例 1 表 1 是一个形式背景 (G, M, I) 。其中: 对象集 $G = \{1, 2, 3, 4\}$; 属性集 $M = \{a, b, c, d, e\}$ 。如果对象具有属性, 则在对象行与属性列的交叉处用 1 标记, 否则用 0 标记。

表 1 形式背景 (G, M, I)
Tab. 1 A formal context (G, M, I)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	1	1	0	1	1
2	1	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	1	1	1	0	0

形式背景 (G, M, I) 对应的概念格 $L(G, M, I)$ 如图 1 所示, 4 种概念集合分别为

$$O(L) = \{(1, abde), (24, abc), (13, d)\},$$

$$A(L) = \{(124, ab), (24, abc), (13, d), (1, abde)\},$$

$$J(L) = \{(1, abde), (24, abc), (13, d)\},$$

$$M(L) = \{(124, ab), (24, abc), (13, d)\}.$$

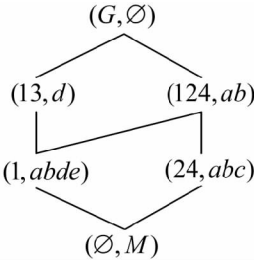


图 1 概念格 $L(G, M, I)$
Fig. 1 A concept lattice $L(G, M, I)$

2 对称形式背景及其性质

王艺超等^[23]和 Hao 等^[24]分别将 FCA 与冲突分析、社交网络相结合, 研究了相关领域的基本问题。由于连接这些不同理论的桥梁是一类特殊的形式背景, 称其为对称形式背景, 并研究其性质。

定义 3 设 (G, M, I) 为形式背景。其中: $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$; $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 。若 $n = m$ 且对于任意的 $x_i, x_j \in G, a_i, a_j \in M, 1 \leq i, j \leq n$, 满足 $i = j$ 时, $x_i I a_j$; $i \neq j$ 时, $x_i I a_j \Leftrightarrow x_j I a_i$, 则称 (G, M, I) 为对称形式背景。

事实上, 对称形式背景可以看作是一个对称矩阵。不失一般性, 本文在后续研究中把对称形式背景的对象集和属性集看作相同的集合, 并记对

称形式背景为 (G, G, I) , 其中 $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。

例2 表2是一个对称形式背景 (G, G, I) 。其中, $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。图2为相应的概念格 $L(G, G, I)$ 。其中:

$$O(L) = J(L) = \{(16, 1246), (2, 1256), (346, 346), (46, 1346), (25, 25), (6, 12346)\};$$
$$A(L) = M(L) = \{(1246, 16), (1256, 2), (346, 346), (1346, 46), (25, 25), (12346, 6)\}.$$

表2 对称形式背景 (G, G, I)

Tab. 2 A symmetric formal context (G, G, I)						
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	1	0	1
2	1	1	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	1
4	1	0	1	1	0	1
5	0	1	0	0	1	0
6	1	1	1	1	0	1

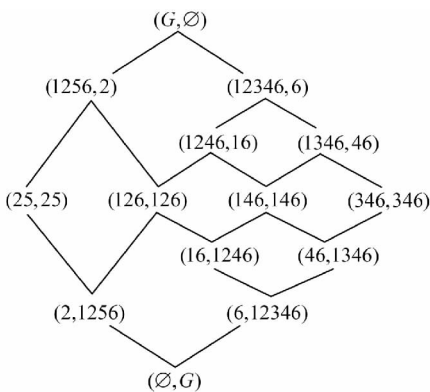


图2 对称形式背景 (G, G, I) 的概念格 $L(G, G, I)$
Fig.2 The concept lattice $L(G, G, I)$ of a symmetric formal context (G, G, I)

下面探讨对称形式背景的概念格的特征。

定理1 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格, 对于任意的 $(X, Y) \in L(G, G, I)$, 都有 $(Y, X) \in L(G, G, I)$ 。

证明 对于任意的 $(X, Y) \in L(G, G, I)$, 有 $Y = X^*, X = Y^*, Y \subseteq G, X \subseteq G$, 故 $(Y, X) \in L(G, G, I)$ 。

定理1表明对称形式背景的概念格中任意一个概念都存在与其自身外延和内涵互换的概念。

本文将对称形式背景 (G, G, I) 的概念格 $L(G, G, I)$ 称为对称概念格。图2就是对称概念格的一个例子。

下面探究对称形式背景的对象概念、属性概念、并不可约概念、交不可约概念等概念的特征。

定理2 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格, 则 $(X, Y) \in O(L) \Leftrightarrow (Y, X) \in A(L)$ 。

证明 必要性。对于任意的 $(X, Y) \in O(L)$, 存在 $x_i \in G$ 使得 $(X, Y) = (x_i^{**}, x_i^*)$, 由定理1知 $(Y, X) = (x_i^*, x_i^{**}) \in L(G, M, I)$, 则 $(Y, X) \in A(L)$ 。充分性类似可证。

定理2表明对称形式背景中对象概念和属性概念一一对应, 并且有对应关系的对象概念和属性概念的外延和内涵互换。

定理3 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格, 则 $(X, Y) \in J(L) \Leftrightarrow (Y, X) \in M(L)$ 。

证明 必要性。设 $(X, Y) \in J(L)$, 即 $(X, Y) \neq (H, M)$, 其中 $(H, M) = \bigvee \{(P, Q) \in L(G, G, I) \mid (P, Q) < (X, Y)\}$ 。因为 $(H, M) \leq (X, Y)$, 所以 $(X, Y) \not\leq (H, M)$, 即 $X \not\subseteq H$ 且 $M \not\subseteq Y$ 。对于任意的 $(P, Q) \in \{(P, Q) \in L(G, G, I) \mid (P, Q) < (X, Y)\}$, $P \subset X, Y \subset Q$ 且由定理1知 $(Y, X), (Q, P) \in L(G, G, I)$, 故 $(Y, X) < (Q, P)$, 则 $\bigwedge \{(Q, P) \in L(G, G, I) \mid (Y, X) < (Q, P)\} = (M, H)$ 。由于 $(M, H) \not\leq (Y, X)$, 所以 $(Y, X) \neq (M, H)$, 故 $(Y, X) \in M(L)$ 。充分性类似可证。

定理3表明对称形式背景中并不可约概念和交不可约概念一一对应, 并且有对应关系的并不可约概念和交不可约概念的外延和内涵互换。

定理4 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格。下列结论成立:

- 1) 若 $(X, Y) \in O(L)$, 则 $X \subseteq Y$;
- 2) 若 $(X, Y) \in A(L)$, 则 $Y \subseteq X$ 。

证明 1) 设 $(X, Y) \in O(L)$, 即存在 $x_i \in G$ 使得 $(X, Y) = (x_i^{**}, x_i^*)$ 。对于任意的 $x_j \in x_i^{**}$, 有 $x_j I x_i^*$, 又由背景对称知 $x_i \in x_i^*$, 则 $x_j I x_i$, 即 $x_j \in x_i^*$ 。因此 $x_i^{**} \subseteq x_i^*$, 即 $X \subseteq Y$ 。类似于结论1)的证明, 可得结论2)成立。

定理4表明对称形式背景中对象概念的外延包含于内涵, 属性概念的内涵包含于外延。又由 $J(L) \subseteq O(L), M(L) \subseteq A(L)^{[1]}$, 易得如下推论。

推论1 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格。下列结论成立:

- 1) 若 $(X, Y) \in J(L)$, 则 $X \subseteq Y$;
- 2) 若 $(X, Y) \in M(L)$, 则 $Y \subseteq X$ 。

推论 1 表明对称形式背景中并不可约概念的外延包含于内涵,交不可约概念的内涵包含于外延。

显然,若一个概念同时是对象概念和属性概念,或同时是并不可约概念和交不可约概念,则其外延一定等于内涵,相关结论见推论 2。

推论 2 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格。下列结论成立:

- 1) 若 $(X, Y) \in O(L) \cap A(L)$, 则 $X = Y$;
- 2) 若 $(X, Y) \in J(L) \cap M(L)$, 则 $X = Y$ 。

注:定理 4、推论 1 及推论 2 的逆命题不成立,可由例 2 中 $(126, 126) \in L(G, G, I)$ 验证。

外延和内涵相等的概念在对称形式背景的相关知识发现中有重要作用。本文将此类概念定义为对称概念,并在后文中研究由对称概念构造的概念约简及其相关性质。

定义 4 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格, $(X, Y) \in L(G, G, I)$ 。若 $X = Y$, 称 (X, Y) 为对称概念。

记对称概念集为 SC , 即 $SC = \{(X, Y) \in L(G, G, I) \mid X = Y\}$ 。

例 3 (续例 2) 对称概念格 $L(G, G, I)$ 的对称概念集 $SC = \{(25, 25), (126, 126), (146, 146), (346, 346)\}$ 。

3 对称概念构造的概念约简

魏玲^[11]、曹丽^[12]等提出的概念约简指保持形式背景二元关系不变的极小概念集。对称概念作为对称形式背景中的特殊概念,与概念约简有密切的联系。本节研究对称形式背景上由对称概念构造的概念约简及其相关性质。

定义 5^[11-12] 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格, $\mathcal{F} \subseteq L(G, M, I)$ 。若 $I = \bigcup_{(X, A) \in \mathcal{F}} X \times A$, 则称 $\mathcal{F}$ 为保持二元关系不变的概念协调集,简称概念协调集;若对任意 $(X_i, A_i) \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus (X_i, A_i)$, 有 $I \neq \bigcup_{(X, A) \in \mathcal{F}'} X \times A$, 则称 $\mathcal{F}$ 为保持二元关系不变的概念约简,简称概念约简。所有概念约简的交称为核心概念集,并记为 $\mathcal{C}$ 。

对称形式背景是特殊的形式背景,利用代表概念矩阵^[16]可以求解对称形式背景的所有概念约简。而其中存在一类特殊的概念约简,即对称概念集 SC 。下面对以上事实展开证明,即对称概念

集是对称形式背景的一个概念约简。

首先,任意对称形式背景中一定存在对称概念。

定理 5 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格。 $SC = \{(X, Y) \in L(G, G, I) \mid X = Y\}$, 则 $SC \neq \emptyset$ 。

证明 对于任意的 $x_i \in G$, 由背景对称知 $x_i I x_i$ 。考虑 $\{x_i\}$, 若对于任意的 $x_j \in G (i \neq j)$ 满足 $x_i I^c x_j$, 由背景对称知 $x_j I^c x_i$, 故 $(\{x_i\}, \{x_i\}) \in L(G, G, I)$; 若存在 $x_j \in G (i \neq j)$ 满足 $x_i I x_j$, 由背景对称知 $x_j I x_i$, 即 $\{x_i, x_j\} I \{x_i, x_j\}$, 则考虑 $\{x_i, x_j\}$ 。重复以上过程, 由 G 是有限集知一定存在 $(X, X) \in L(G, G, I)$, 即 $SC \neq \emptyset$ 。

其次,定理 6 证明了对称概念集是一个概念约简。

定理 6 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格。 $SC = \{(X, Y) \in L(G, G, I) \mid X = Y\}$, 则 SC 是一个概念约简。

证明 首先,证明 SC 是概念协调集,即 $\bigcup_{(X, Y) \in SC} X \times Y = I$ 。 $\bigcup_{(X, Y) \in SC} X \times Y \subseteq I$ 显然成立,下证 $I \subseteq \bigcup_{(X, Y) \in SC} X \times Y$ 。对于任意 $(x_i, x_j) \in I$ 即 $x_i I x_j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 由背景对称知 $x_j I x_i$, 且 $x_j I x_j$, 故 $\{x_i, x_j\} I \{x_i, x_j\}$ 。考虑 $\{x_i, x_j\}$, 若对于任意的 $x_k \in G (k \neq i, k \neq j)$, $\{x_k\} I^c \{x_i, x_j\}$, 由背景对称知 $\{x_i, x_j\} I^c \{x_k\}$, 则 $(\{x_i, x_j\}, \{x_i, x_j\}) \in L(G, G, I)$; 若存在 $x_k \in G (k \neq i, k \neq j)$ 使得 $\{x_k\} I \{x_i, x_j\}$, 即 $\{x_i, x_j, x_k\} I \{x_i, x_j, x_k\}$, 故考虑 $\{x_i, x_j, x_k\}$ 。重复以上过程, 由 G 是有限集知一定存在 $(X, Y) \in SC$ 使得 $(x_i, x_j) \in X \times Y$, 则 $(x_i, x_j) \in \bigcup_{(X, Y) \in SC} X \times Y$, 故 $I \subseteq \bigcup_{(X, Y) \in SC} X \times Y$ 。

其次,证明 SC 是概念约简。假设存在 $(X, X) \in SC$ 使 $\bigcup_{(Y, Y) \in SC \setminus \{(X, X)\}} Y \times Y = I$, 则 $X \times X \subseteq \bigcup_{(Y, Y) \in SC \setminus \{(X, X)\}} Y \times Y$ 。断言存在 $(Y, Y) \in SC \setminus \{(X, X)\}$ 使 $X \times X \subseteq Y \times Y$ 。否则,不妨假设 $(Y, Y), (Z, Z) \in SC \setminus \{(X, X)\}$, $(Y, Y) \neq (Z, Z)$, $X \times X \subseteq Y \times Y \cup Z \times Z$, 且存在 $x \in X \cap Y$, $x \notin X \cap Z, y \in X \cap Z, y \notin X \cap Y$, 即 $(x, y) \in X \times X$ 但 $(x, y) \notin Y \times Y \cup Z \times Z$, 与 $X \times X \subseteq Y \times Y \cup Z \times Z$ 矛盾。因此断言成立。 $X \times X \subseteq Y \times Y$ 则 $X \subseteq Y$, 又由于 (X, X) 和 (Y, Y) 都是概念且 $(X, X) \neq (Y, Y)$, 故与概念间偏序关系的定义产生矛盾。因此,对于任意的 $(X, X) \in SC$, $\bigcup_{(Y, Y) \in SC \setminus \{(X, X)\}} Y \times Y \neq I$, 即 SC 是概念约简。

例4 (续例2) 对称形式背景 (G, G, I) 有10个概念约简, 其中对称概念集 $SC = \{(25, 25), (126, 126), (146, 146), (346, 346)\}$ 就是一个概念约简。

作为对称形式背景中的概念约简, 对称概念集 SC 具有独特的性质。在讨论其性质之前, 先给出对称概念格的对称轴的定义。

定义6 设 $L(G, G, I)$ 为对称概念格, $(X, Y) \in L(G, G, I)$ 。若 $X \not\subseteq Y$ 且 $Y \not\subseteq X$, 则称 (X, Y) 为轴概念。进一步, 称 $AXIS(L) = \{(X, Y) \in L(G, G, I) \mid X \not\subseteq Y \text{ 且 } Y \not\subseteq X\}$ 为对称概念格 $L(G, G, I)$ 的对称轴。

由于对称概念的外延等于内涵, 故对称概念一定是轴概念。

性质1 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格, 则 $SC \subseteq AXIS(L)$ 。

性质1给出了一种直观获取对称形式背景的一个概念约简的方法。即首先画出对称概念格; 其次, 确定对称概念格的对称轴; 最后, 在对称轴中找到所有的对称概念, 对称概念的全体即为一个概念约简。需要注意的是, 轴概念不一定为对称概念, 如例5所示。

例5 表3为对称形式背景 (G, G, I) 。其中, $G = \{1, 2, 3, 4\}$ 。图3为相应的对称概念格。显然, $(12, 34)$ 是一个轴概念, 但 $(12, 34)$ 不是对称概念。

表3 例5的对称形式背景 (G, G, I)
Tab.3 The symmetric formal context (G, G, I) of example 5

	1	2	3	4
1	1	0	1	1
2	0	1	1	1
3	1	1	1	0
4	1	1	0	1

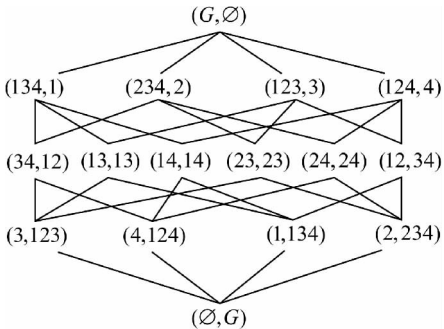


图3 例5的对称概念格 $L(G, G, I)$

Fig.3 The symmetric concept lattice $L(G, G, I)$ of example 5

对称概念是特殊的轴概念, 满足以下性质。

性质2 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格, $(Z, Z) \in SC$ 。若 $(X, Y) \in L(G, G, I)$ 满足 $(X, Y) \leq (Z, Z)$, 则存在 $(Y, X) \in L(G, G, I)$ 使得 $(Z, Z) \leq (Y, X)$; 若 $(Z, Z) \leq (X, Y)$, 则 $(Y, X) \leq (Z, Z)$ 。

证明 设 $(Z, Z) \in SC$, 对于任意的 $(X, Y) \leq (Z, Z)$, $(X, Y) \in L(G, G, I)$, 有 $X \subseteq Z \subseteq Y$, 又由定理1知 $(Y, X) \in L(G, G, I)$, 且由概念的偏序关系知 $(Z, Z) \leq (Y, X)$; 同理, 对于任意的 $(Z, Z) \leq (X, Y)$, 有 $(Y, X) \leq (Z, Z)$ 。

下面给出核心概念集 $\mathcal{C}$ 和对称概念集 SC 之间的关系。

性质3 设 (G, G, I) 为对称形式背景, $L(G, G, I)$ 为其概念格, 则 $\mathcal{C} \subseteq SC$ 。

性质3显然成立。该性质表明对称形式背景中若存在核心概念, 则一定是对称概念。即对称形式背景中若存在核心知识, 则一定包含于 SC 。在此意义下, SC 是一类重要的概念约简。

4 对称形式背景及对称概念格的应用

本节从冲突分析及社交网络的角度给出对称形式背景及对称概念格的实际应用。

4.1 对称形式背景在冲突分析中的应用

冲突普遍存在于诉讼纠纷、政策制定、军事行动等方面。在冲突中, 至少有两方(称为代理人)在某些议题上存在争议。而冲突分析^[23, 25-28]是对冲突进行分析从而帮助决策者制定合理策略的理论。

Pawlak 结合粗糙集理论首次提出了冲突分析的具体模型^[25]。基于此, 多位学者从不同角度或结合不同理论对冲突分析模型进行了改进或拓展^[26-28]。其中, Yao 结合三支决策理论给出了三支冲突分析模型^[26]。三支冲突分析模型利用多值冲突表表示代理人关于议题的态度。

定义7^[26] 称三元组 $S = (A, I, r)$ 为多值冲突表。其中: $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为代理人集, A 中每个元素 $x_j (1 \leq j \leq n)$ 为一个代理人; $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ 为议题集, I 中的每个元素 $i_k (1 \leq k \leq m)$ 为一个议题; $r: A \times I \rightarrow [-1, +1]$ 为映射, $r(x_j, i_k)$ 表示代理人 x_j 关于议题 i_k 的态度的取值。

例6 表4为多值冲突表 $S = (A, I, r)$ 。其中:

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}; I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\};$
 $r(x_j, i_k)$ 为代理人 x_j 关于议题 i_k 的态度取值,如
 $r(x_1, i_3) = +0.9$ 表示代理人 x_1 支持议题 i_3 的程
度为 0.9, $r(x_2, i_4) = -0.5$ 表示代理人 x_2 反对议
题 i_4 的程度为 0.5。

表 4 多值冲突表(A,I,r)

Tab. 4 A many-valued conflict situation (A,I,r)

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
x_1	+1	+0.1	+0.9	-1	+0.7
x_2	-0.5	-0.4	0	-0.5	+1
x_3	+1	+0.9	+0.1	0	-1
x_4	0	+0.9	+0.6	-0.4	+0.5
x_5	-0.3	-1	-0.2	+1	-0.9
x_6	0	+0.1	0	+0.8	-1

在冲突分析中,对代理人之间冲突程度的刻画是研究的焦点。Yao 等利用距离函数定义了代理人之间的冲突程度^[26],在此基础上,Lang 等^[28]和王艺超等^[23]对其进行了改进。特别地,王艺超等^[23]定义的复合冲突程度同时关注两个代理人关于议题态度取值的差别和每个代理人自身关于议题态度的取值,可以较为全面地刻画两个代理人之间的冲突程度。基于复合冲突程度,王艺超等研究了冲突场景中的极大联盟,即刻画了复合冲突程度小于等于给定阈值的极大的代理人集合,并借助形式概念分析定义了联盟形式背景,利用联盟形式背景中外延和内涵相等的等联盟概念获取了所有的极大联盟。

表 2 中对称形式背景为 (G,G,I) , 其中 $G = \{1,2,3,4,5,6\}$ 。令 6 个对象(属性)表示 6 位代理人,给定议题子集,对于任意的 $x_i, x_j \in G$, 若代理人 x_i 与代理人 x_j 的复合冲突程度小于等于给定阈值,则用 $x_i I x_j$ 表示代理人 x_i 与代理人 x_j 具有联盟关系,如取议题子集 $J = \{i_2, i_3\}$, 阈值 $(\alpha, \beta) = (0.4, 0.3)$, 表 4 对应的联盟形式背景同表 2。由此可得本文定义的对称形式背景直接对应冲突分析中的联盟形式背景^[23]。进一步,对称概念对应等联盟概念,对称概念集 SC 对应等联盟概念集,对称概念的外延(或内涵)对应极大联盟。

因此,在冲突分析中对称形式背景及对称概念格可被用于获取代理人的极大联盟。

4.2 对称形式背景在社交网络中的应用

社交网络^[24, 29-30]是由许多节点构成的一种社会结构,节点通常指用户,而用户之间有着各种

社会关系。社交网络可表示为包含节点和边的图,其中节点表示用户,节点之间有边相连表示用户之间有关,如图 4 所示。

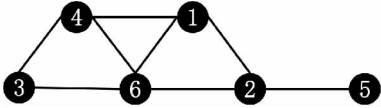


图 4 社交网络
Fig. 4 Social network

在社交网络中,用户通常因为共同的兴趣和目的聚集在几个社区中,并进行大量的社交互动。因此,社区检测是社交网络中的一项重要研究内容。Tang 等将社交网络与 FCA 相结合,提出了一种化学结构检索方法^[29]。Hao 等给出了利用 FCA 进行 k -团(k -clique)检测的算法^[24]。具体地,Hao 等首先定义了修正邻接矩阵以建立形式背景^[24]。图 4 所对应的形式背景同表 2,其中,6 个对象(或属性)表示 6 个节点,对于任意的 $x_i, x_j \in G, x_i I x_j$ 表示节点 x_i 与 x_j 之间有边。因此,对称形式背景的二元关系 I 直接对应社交网络中的修正邻接矩阵。

此外,Hao 等称修正邻接矩阵形成的形式背景中外延等于内涵的概念为等势概念(equiconcept),进一步,若等势概念的外延(或内涵)的模为 k ,则称为 k -等势概念, (k -equiconcept)。并证明了 k -等势概念的外延(或内涵)为 k -团,如图 5 所示,同一个椭圆虚线内的节点构成一个 k -团,图 5 中有 3 个 3-团,1 个 2-团。由此,对称概念对应等势概念,对称概念集 SC 对应等势概念集,外延(或内涵)的模为 k 的对称概念的外延(或内涵)对应 k -团。

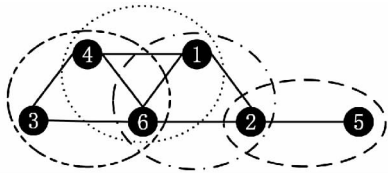


图 5 k -团社区检测
Fig. 5 k -clique community detection

因此,在社交网络中对称形式背景及对称概念格可应用于 k -团社区检测。

5 结语

本文首先定义对称形式背景,讨论对称形式背景概念及概念格的特征,并给出对称概念的定义;其次,证明对称概念集 SC 是概念约简并探讨

SC 的性质;最后,从冲突分析及社交网络的角度解释对称形式背景、对称概念及 SC 的实际语义及应用。

关于对称形式背景还有很多新问题亟待提出和解决。如对对称形式背景的二元关系满足自反性和对称性,若在此基础上附加传递性,那么同时满足自反性、对称性和传递性的形式背景对应着何种应用场景、有何更特殊的性质等都是值得探讨的问题。

参考文献

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[C] // RIVAL I. Ordered Sets. Dordrecht-Boston: Springer, 1982: 445-470.
- [2] GODIN R, MISSAOUI R, ALAOUI H. Incremental concept formation algorithms based on Galois (concept) lattices [J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 246-267.
- [3] 祁建军, 汪文威. 多线程并行构建三支概念 [J]. 西安交通大学学报, 2017, 51(3): 116-121.
QI J J, WANG W W. A multithreaded parallel algorithm for constructing three-way concepts [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2017, 51(3): 116-121.
- [4] SUMANGALI K, KUMAR C A. Concept lattice simplification in formal concept analysis using attribute clustering [J]. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 2019, 10(6): 2327-2343.
- [5] 张文修, 魏玲, 祁建军. 概念格的属性约简理论与方法[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005, 35(6): 628-639.
ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice [J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2005, 48(6): 713-726.
- [6] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, 38(2): 195-208.
WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts [J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2008, 51(7): 910-923.
- [7] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.
- [8] WANG X, ZHANG W X. Knowledge reduction in concept lattices based on irreducible elements[C] // Lecture Notes in Computer Science (Transactions on Computational Science V: Special Issue on Cognitive Knowledge Representation). Berlin, Heidelberg: Springer, 2009, 5540: 128-142.
- [9] LI T J, LI M Z, GAO Y. Attribute reduction of concept lattice based on irreducible elements[J]. International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing, 2013, 11(6): 2792-2813.
- [10] LI J H, MEI C L, WANG J H, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 71: 435-445.
- [11] 魏玲, 曹丽, 祁建军, 等. 形式概念分析中的概念约简与概念特征 [J]. 中国科学: 信息科学, 2020, 50(12): 1817-1833.
WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis[J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50(12): 1817-1833.
- [12] 曹丽, 魏玲, 祁建军. 保持二元关系不变的概念约简 [J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(6): 516-524.
CAO L, WEI L, QI J J. Concept reduction preserving binary relations [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 516-524.
- [13] 谢小贤, 李进金, 陈东晓, 等. 基于布尔矩阵的保持二元关系不变的概念约简 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2020, 55(5): 32-45.
XIE X X, LI J J, CHEN D X, et al. Concept reduction of preserving binary relations based on boolean matrix [J]. Journal of Shandong University (Natural Science Edition), 2020, 55(5): 32-45.
- [14] 王霞, 彭致华, 李俊余, 等. 一种基于概念可辨识矩阵的概念约简方法[J]. 计算机科学, 2021, 48(1): 125-130.
WANG X, PENG Z H, LI J Y, et al. Method of concept reduction based on concept discernibility matrix [J]. Computer Science, 2021, 48(1): 125-130.
- [15] 马文胜, 侯锡林. 形式概念分析中的同效关系与概念约简[J]. 计算机科学, 2023, 50(4): 63-76.
MA W S, HOU X L. Same effect relation and concept reduction in formal concept analysis [J]. Computer Science, 2023, 50(4): 63-76.
- [16] ZHAO S Y, QI J J, LI J A, et al. Concept reduction in formal concept analysis based on representative concept matrix [J]. International Journal of Machine Learning

- and Cybernetics, 2023, 14(4): 1147-116.
- [17] 李俊余, 李星璇, 王霞, 等. 基于三元因子分析的三元概念约简 [J]. 南京大学学报(自然科学), 2020, 56(4): 480-493.
- LI J Y, LI X X, WANG X, et al. Reduction of triadic concepts based on triadic factor analysis [J]. Journal of Nanjing University (Natural Science Edition), 2020, 56(4): 480-493.
- [18] WEI L, LIU L, QI J J, et al. Rules acquisition of formal decision contexts based on three-way concept lattices [J]. Information Sciences, 2020, 516: 529-544.
- [19] CHEN J H, ZHENG H Y, WEI L, et al. Factor diagnosis and future governance of dangerous goods accidents in China's ports [J]. Environmental Pollution, 2020, 257: 113582.
- [20] LI J H, MEI C L, LYU Y J. Incomplete decision contexts: Approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1): 149-165.
- [21] KUMAR C A, SRINIVAS S. Concept lattice reduction using fuzzy K -Means clustering [J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(3): 2696-2704.
- [22] YAO Y Y. Interval sets and three-way concept analysis in incomplete contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 3-20.
- [23] 王艺超, 王振, 魏玲, 等. 多值冲突表的复合冲突程度分析 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2022, 52(5): 805-812.
- WANG Y C, WANG Z, WEI L, et al. Compound conflict degree analysis of many-valued conflict situation [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2022, 52(5): 805-812.
- [24] HAO F, MIN G Y, PEI Z, et al. K -clique community detection in social networks based on formal concept analysis [J]. IEEE Systems Journal, 2017, 11(1): 250-259.
- [25] PAWLAK Z. An inquiry into anatomy of conflicts [J]. Information Sciences, 1998, 109: 65-78.
- [26] YAO Y Y. Three-way conflict analysis: Reformulations and extensions of the Pawlak model [J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 180: 26-37.
- [27] SUN B Z, CHEN X T, ZHANG L Y, et al. Three-way decision making approach to conflict analysis and resolution using probabilistic rough set over two universes [J]. Information Sciences, 2020, 507: 809-822.
- [28] LANG G M, YAO Y Y. New measures of alliance and conflict for three-way conflict analysis [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 132: 49-69.
- [29] TANG P, HUI S C, FONG A C. A lattice-based approach for chemical structural retrieval [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2015, 39: 215-222.
- [30] YANG Y X, HAO F, PANG B B, et al. Dynamic maximal cliques detection and evolution management in social internet of things: A formal concept analysis approach [J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2022, 9(3): 1020-1032.

(编辑 张欢)